

Prof. Dr. Alfred Toth

Quantitative und qualitative semiotische Zahlentheorie

1. Dass das monokontexturale Peircesche Zeichen aufgrund seiner relationalen Definition für alle drei Bourbakischen Teilgebiete der Mathematik, d.h. für Algebra, Ordnungstheorie und Topologie, relevant ist, dürfte spätestens seit Toth (2006) bekannt sein. In Toth (2003, 2009f) wurde darüberhinaus nachgewiesen, dass das triadische Zeichen nicht nur für die quantitative, sondern auch für die qualitative Mathematik relevant ist.

2. Zum Nachweis, dass das Peircesche monokontexturale Zeichen die Anforderungen, eine quantitative Zahl zu sein, erfüllt, beweisen wir zuerst die Isomorphie der Peirceschen Semiotik mit dem Körper der reellen (2.1.) und hernach mit dem Körper der komplexen Zahlen (2.2.).

2.1. Sei K die Menge mit den Elementen 0 und 1, d.h. $K = \{0, 1\}$, und den zwei inneren Verknüpfungen Addition ("+") und Multiplikation ("·"), die wie folgt definiert seien:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0 & 0 \cdot 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 & 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 + 0 = 1 & 1 \cdot 0 = 0 \\ 1 + 1 = 0 & 1 \cdot 1 = 1 \end{array}$$

Es wird gezeigt, dass K die Körperaxiome erfüllt. Die Kommutativität der Addition ist erfüllt:

$$\begin{array}{l} 0 + 0 = 0 + 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 = 1 + 1 = 0 \end{array}$$

Die Assoziativität der Addition ebenfalls:

$$\begin{array}{l} 0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0 = 0 \\ 0 + (0 + 1) = (0 + 0) + 1 = 1 \\ 0 + (1 + 0) = (0 + 1) + 0 = 1 \\ 1 + (0 + 1) = (1 + 0) + 1 = 0 \end{array}$$

$$1 + (1 + 0) = (1 + 1) + 0 = 0$$

$$1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 = 1$$

Die Kommutativität der Multiplikation ist erfüllt:

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

Ebenso die Assoziativität der Multiplikation:

$$0 \cdot (0 \cdot 0) = (0 \cdot 0) \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot (0 \cdot 1) = (0 \cdot 0) \cdot 1 = 0$$

$$0 \cdot (1 \cdot 0) = (0 \cdot 1) \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot (0 \cdot 1) = (1 \cdot 0) \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot (1 \cdot 0) = (1 \cdot 1) \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot (1 \cdot 1) = (1 \cdot 1) \cdot 1 = 1$$

Gültig sind auch die Distributivgesetze:

$0 \cdot (0 + 0) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$	$(0 + 0) \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot (0 + 1) = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$	$(0 + 1) \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot (1 + 0) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$	$(1 + 0) \cdot 0 = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot (0 + 1) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$	$(0 + 1) \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$
$1 \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1$	$(1 + 0) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$
$1 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$	$(1 + 1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$

Auch die Umkehrbarkeit der Addition ist erfüllt:

$$0 - 0 = 0 + 0 = 0$$

$$0 - 1 = 0 + 1 = 1$$

$$1 - 0 = 1 + 0 = 1$$

$$1 - 1 = 1 + 1 = 0,$$

d.h. $x = b - a = b + a$. Entsprechendes gilt für die Umkehrbarkeit der Multiplikation.

Mit Hilfe der Körperaddition können nun Subzeichen, Zeichenklassen, Realitätsthematiken und weitere semiotische Gebilde addiert werden. Wegen $1 + 1 = 0$ bleiben in der Summenmatrix jeweils gerade jene Subzeichen weg, die in beiden Summandenmatrizen auftreten. Beispiel:

$$(3.1 \ 2.1 \ 1.1) + (3.1 \ 2.1 \ 1.3) = (1.1 \ 1.3).$$

In Matrizendarstellung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für je zwei Summanden A und B und ihre Summe C einer Körperaddition gilt somit: $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Die Körperaddition erweist sich damit als semiotische inverse Durchschnittsbildung. Doch auch die Körpermultiplikation hat einen angebbaren semiotischen Sinn. Weil das Produkt 1 nur durch die Multiplikation $1 \cdot 1$ entsteht, bleiben in der Produktmatrix jeweils gerade jene Subzeichen zurück, die in beiden Faktorenmatrizen auftreten. Die Körpermultiplikation erweist sich somit als semiotische Durchschnittsbildung:

$$(3.1 \ 2.1 \ 1.1) \cdot (3.1 \ 2.1 \ 1.3) = (3.1 \ 2.1)$$

In Matrizendarstellung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für je zwei Faktoren A und B und ihr Produkt C einer Körpermultiplikation gilt somit: $C = (A \cap B)$.

2.2. Wir wollen nun nachweisen, dass die Körper \mathbf{S} und \mathbb{C} zueinander isomorph sind. Da wir in 2.1. die Isomorphie von \mathbf{S} und \mathbb{R} bereits nachgewiesen haben, können wir uns hier auf den Nachweis beschränken, dass die komplexen Zahlen $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ und $(0, -1)$ die Anforderungen an einen Körper erfüllen.

Die Kommutativität der Addition ist erfüllt:

$$\begin{aligned}(0, 0) + (1, 0) &= (1, 0) + (0, 0) = (1, 0) \\(0, 0) + (0, 1) &= (0, 1) + (0, 0) = (0, 1) \\(0, 0) + (-1, 0) &= (-1, 0) + (0, 0) = (-1, 0) \\(0, 0) + (0, -1) &= (0, -1) + (0, 0) = (0, -1)\end{aligned}$$

Die Assoziativität der Addition ist erfüllt:

$$\begin{aligned}(0, 0) + [(0, 0) + (1, 0)] &= [(0, 0) + (0, 0)] + (1, 0) = (1, 0) \\(0, 0) + [(1, 0) + (0, 0)] &= [(0, 0) + (1, 0)] + (0, 0) = (1, 0) \\(0, 0) + [(0, 0) + (0, 1)] &= [(0, 0) + (0, 0)] + (0, 1) = (0, 1) \\(0, 0) + [(0, 1) + (0, 0)] &= [(0, 0) + (0, 1)] + (0, 0) = (0, 1) \\(0, 0) + [(0, 0) + (-1, 0)] &= [(0, 0) + (0, 0)] + (-1, 0) = (-1, 0) \\(0, 0) + [(-1, 0) + (0, 0)] &= [(0, 0) + (-1, 0)] + (0, 0) = (-1, 0) \\(0, 0) + [(0, 0) + (0, -1)] &= [(0, 0) + (0, 0)] + (0, -1) = (0, -1) \\(0, 0) + [(0, -1) + (0, 0)] &= [(0, 0) + (0, -1)] + (0, 0) = (0, -1)\end{aligned}$$

Die Kommutativität der Multiplikation ist erfüllt:

$$\begin{aligned}(0, 0) \cdot (1, 0) &= (1, 0) \cdot (0, 0) = (0, 0) \\(0, 0) \cdot (0, 1) &= (0, 1) \cdot (0, 0) = (0, 0) \\(0, 0) \cdot (-1, 0) &= (-1, 0) \cdot (0, 0) = (0, 0) \\(0, 0) \cdot (0, -1) &= (0, -1) \cdot (0, 0) = (0, 0)\end{aligned}$$

Die Assoziativität der Multiplikation ist erfüllt:

$$\begin{aligned}(0, 0) \cdot [(0, 0) \cdot (1, 0)] &= [(0, 0) \cdot (0, 0)] \cdot (1, 0) = (0, 0) \\(0, 0) \cdot [(1, 0) \cdot (0, 0)] &= [(0, 0) \cdot (1, 0)] \cdot (0, 0) = (0, 0) \\(0, 0) \cdot [(0, 0) \cdot (0, 1)] &= [(0, 0) \cdot (0, 0)] \cdot (0, 1) = (0, 0) \\(0, 0) \cdot [(0, 1) \cdot (0, 0)] &= [(0, 0) \cdot (0, 1)] \cdot (0, 0) = (0, 0) \\(0, 0) \cdot [(0, 0) \cdot (-1, 0)] &= [(0, 0) \cdot (0, 0)] \cdot (-1, 0) = (0, 0) \\(0, 0) \cdot [(-1, 0) \cdot (0, 0)] &= [(0, 0) \cdot (-1, 0)] \cdot (0, 0) = (0, 0) \\(0, 0) \cdot [(0, 0) \cdot (0, -1)] &= [(0, 0) \cdot (0, 0)] \cdot (0, -1) = (0, 0) \\(0, 0) \cdot [(0, -1) \cdot (0, 0)] &= [(0, 0) \cdot (0, -1)] \cdot (0, 0) = (0, 0)\end{aligned}$$

Gültig sind auch die Distributivgesetze:

$$\begin{aligned}
 (0, 0) \cdot [(0, 0) + (1, 0)] &= [(0, 0) + (1, 0)] \cdot (0, 0) = (0, 0) \\
 (0, 0) \cdot [(1, 0) + (0, 0)] &= [(1, 0) + (0, 0)] \cdot (0, 0) = (0, 0) \\
 (0, 0) \cdot [(0, 0) + (0, 1)] &= [(0, 0) + (0, 1)] \cdot (0, 0) = (0, 0) \\
 (0, 0) \cdot [(0, 1) + (0, 0)] &= [(0, 1) + (0, 0)] \cdot (0, 0) = (0, 0) \\
 (0, 0) \cdot [(0, 0) + (-1, 0)] &= [(0, 0) + (-1, 0)] \cdot (0, 0) = (0, 0) \\
 (0, 0) \cdot [(-1, 0) + (0, 0)] &= [(-1, 0) + (0, 0)] \cdot (0, 0) = (0, 0) \\
 (0, 0) \cdot [(0, 0) + (0, -1)] &= [(0, 0) + (0, -1)] \cdot (0, 0) = (0, 0) \\
 (0, 0) \cdot [(0, -1) + (0, 0)] &= [(0, -1) + (0, 0)] \cdot (0, 0) = (0, 0)
 \end{aligned}$$

Der Nachweis der Umkehrbarkeit der Addition und Multiplikation wird entsprechend dem Vorgehen bei den reellen Zahlen geführt (vgl. 2.1.).

3. Die „Isomorphie“ (die es polykontextural nicht gibt, und am wenigstens zwischen einem monokontexturalen und einem polykontexturalen System) der quantitativen Peirceschen Semiotik und der in Toth (2009a-e) geschaffenen qualitativen Semiotik zeigen wir im folgenden für die Proto-, Deutero- und Trito-Struktur getrennt dadurch, dass wir die 3-kontexturale polykontexturale Semiotik auf die 10 Peirceschen Zeichenklassen abbilden.

3.1. Proto-Semiotik → Peirce-Semiotik

000 → (3.1 2.1 1.1), (3.2 2.2 1.2), (3.3 2.3 1.3)

001 → (3.1 2.1 1.2), (3.1 2.1 1.3), (3.2 2.2 1.3)

012 → (3.1 2.2 1.3)

3.2. Deutero-Semiotik → Peirce-Semiotik

000 → (3.1 2.1 1.1), (3.2 2.2 1.2), (3.3 2.3 1.3)

001 → (3.1 2.1 1.2), (3.1 2.1 1.3), (3.2 2.2 1.3)

012 → (3.1 2.2 1.3)

Die beiden Abbildungssysteme 3.1. und 3.2. sind also identisch. Wegen Proto- und Deutero-Äquivalenz können nur 7 der 10 Peirceschen Zeichenklassen abgebildet werden.

3.3. Trito-Semiotik → Peirce-Semiotik

000 → (3.1 2.1 1.1), (3.2 2.2 1.2), (3.3 2.3 1.3)
001 → (3.1 2.1 1.2), (3.1 2.1 1.3), (3.2 2.2 1.3)
010 → *(3.1 2.2 1.1), *(3.1 2.3 1.3), *(3.2 2.3 1.2).
011 → (3.1 2.2 1.2), (3.1 2.3 1.3), (3.2 2.3 1.3)
012 → (3.1 2.2 1.3)

Neben den 10 Peirceschen Zeichenklassen werden hier also auch die drei irregulären *-Zeichenklassen abgebildet.

4. Zusammenfassend halten wir fest, dass die Peircesche Semiotik sowohl zu den quantitativen Körpern der reellen und der komplexen Zahlen als auch zu den qualitativen Strukturen der 3-kontextuellen Proto-, Deutero- und Trito-Zahlen isomorph sind.

Bibliographie

- Toth, Alfred, Die Hochzeit und Semiotik und Struktur. Klagenfurt 2003
Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008
Toth, Alfred, Qualitative semiotische Zahlentheorie I. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Qual.%20sem.%20Zahlenth..pdf> (2009a)
Toth, Alfred, Qualitative semiotische Zahlentheorie II.
In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Qual.%20sem.%20Zahlenth.%20II.pdf> (2009b)
Toth, Alfred, Qualitative semiotische Zahlentheorie III.
In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Qual.%20Sem.%20Zahlenth.%20III.pdf> (2009c)
Toth, Alfred, Qualitative semiotische Zahlentheorie IV. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Qual.%20sem.%20Zth.%20IV.pdf> (2009d)
Toth, Alfred, Qualitative semiotische Zahlentheorie V. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Qual.%20sem.%20Zth.%20V.pdf> (2009e)

Toth, Alfred, Was ist überhaupt ein Zeichen? In: Electronic Journal of
Mathematical Semiotics (erscheint, 2009f)

29.11.2009